YILLAR	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
ÖSS-YGS /LYS	-	1	-	-	-	-	-	1	1	1/1

KÜMELER

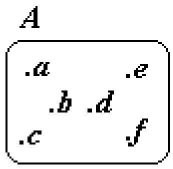
TANIM: Kümelerin tam bir tanımı yoksa da matematikçiler kümeyi; iyi tanımlanmış nesneler topluluğu olarak kabul ederler.
Örneğin ; 'Ülkemizin ırmakları' iyi tanımlanmıştır ve bir küme oluşturur. Çünkü sayıları da isimleri de bellidir. Ancak , 'sınıfımızın başarılı öğrencileri' iyi tanımlanmamıştır. Çünkü bir dersten başarılı olan bir öğrenci , başka bir dersten başarısız olabilir. Bu yüzden de küme oluşturmaz.

KÜMELERİN GÖSTERİMİ

1) LİSTE YÖNTEMİ: Küme elemanlarını aralarına virgül koyarak küme parantezi arasında yazma yöntemidir.

❖ A={a,b,c,d,e,f}

2) Venn Şeması: Küme elemanlarını kapalı bir geometrik şekil içinde , soluna nokta koyarak belirtme yöntemidir.



3) ORTAK ÖZELLİK YÖNTEMİ: Kümenin elemanları değil ortak özellikleri belirtilir.

❖ A={x | –2<x<5 , x∈Z}

ELEMAN SAYISI

Bir A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.

❖ A={a,b,c,d,e,f} ⇒ s(A)=6

BOŞ KÜME
Elemanı olmayan kümeye boş küme denir.
ϕ veya {} ile gösterilir.

UYARI: {ϕ} ifadesi boş kümeyi göstermez.

EVRENSEL KÜME

Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan en geniş kümeye denir ve 'E' ile gösterilir.

EŞİT KÜME

Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir.

❖ A={1,2,3,4} ve B={x | 0<x<5 , x∈N} ise A=B dir.

DENK KÜME:

Eleman sayıları eşit olan kümelere denir. s(A)=s(B) ise A≡B dir.

❖ A={a,b,c} ve B={1,2,3} , s(A)=s(B)=3 olduğundan A≡B dir.

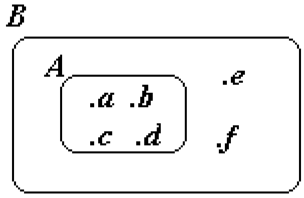
AYRIK KÜME :

Ortak elemanı olmayan kümelere ayrık kümeler denir. A ve B ayrık kümeler ise $A \cap B = \phi$ dir.

❖ A={1,2,3,4} ve B={a,b,c,d,e} ise A ve B kümeleri ayrık kümelerdir. $A \cap B = \phi$

ALT KÜME :

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesinin her elemanı , B kümesinin de elemanıysa A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir ve A⊂B veya B⊃A ile gösterilir.



$A=\{a,b,c,d\}$
$B=\{a,b,c,d,e,f\}$
$A\subset B$ dir.

ÖZELLİKLER:

1) Her küme kendisinin alt kümesidir. $A\subset A$
2) Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\phi\subset A$
3) $A\subset B$ ve $B\subset A \Leftrightarrow A=B$
4) $A\subset B$ ve $B\subset C \Leftrightarrow A\subset C$
5) s(A)=n ise A kümesinin alt küme sayısı 2^n dir.

ÖZALT KÜME

Bir kümenin kendisinden başka tüm alt kümelerine denir.
s(A)=n ise A'nın özalt küme sayısı 2^{n-1} dir.

NOT 1 : n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt küme sayısı C(n,r) ile hesaplanır.(n≥r)

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

- ❖ n!=1.2.3.......n
- ❖ 0!=1!=1
- ❖ $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
- ❖ $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
- ❖ $\binom{n}{p}=\binom{n}{r} \Leftrightarrow$ i) $n=p+r$ ii) $p=r$
- ❖ $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
- ❖ $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.....+\binom{n}{n}=2^n$

Pratik Yol-1: kombinasyon hesabında aşağıdaki pratik hesaplamayı kullanın:

Örneğin $\binom{5}{2}$'i hesaplayalım. Pay'a 5'ten geriye 2 tane sayı, paydaya da 2'den 1'e kadar yazılır.

$$\binom{5}{2}=\frac{5.4}{2.1}=\frac{20}{2}=10$$

bir örnek daha:

$\binom{6}{3}$ hesaplayalım: Pay'a 6'ten geriye 3 tane sayı, paydaya da 3'ten 1'e kadar yazılır.

$$\binom{6}{3}=\frac{6.5.4}{3.2.1}=20 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(1) Bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Bu kümenin eleman sayısı 1 arttırılırsa alt küme sayısı ve özalt küme sayısı kaç olur?

ÇÖZÜM:

Bu kümenin eleman sayısı n olsun

$\binom{n}{2}=\binom{n}{3} \Leftrightarrow$ i) $n=2+3=5$ ii) $2\neq 3$

özelliğini hatırlarsak eleman sayımızın 5 olduğu görülür.
Kümenin eleman sayısını 1 arttırırsak 6 olur. Bu durumda

Alt küme sayısı : $2^6=64$
Öz alt küme sayısı : $2^6-1=64-1=63$ olur.

ÖRNEK(2) 5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$C(5,3)=\binom{5}{3}=\frac{5!}{(5-3)!.3!}=\frac{5!}{2!.3!}=\frac{120}{2.6}=10$$

veya pratik yol-1 den :

$$\binom{5}{3}=\frac{5.4.3}{3.2.1}=10 \text{ bulunur.}$$

Pratik yol-2: Kümelerin bulunur-bulunmaz soruları için kolay uygulanabilir aşağıdaki yöntem çok işinize yarayacak;
n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümeleri için

$C(n,r)=\binom{n}{r}$ şablonu yazılır ve ;

Bulunur derken hem n den hem r den, bulunmaz derken de sadece n den istenen kadar eksiltme yapılır.

ÖRNEK(3) A={1,2,3,4,5,6} kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde;

a) 1 ve 3 birlikte bulunur?
b) 1 ve 3 bulunmaz?
c) 2 bulunur 3 bulunmaz?
d) 1 veya 3 bulunur?
e) 1 veya 3 bulunmaz

ÇÖZÜM:

Şablonumuz : $\begin{array}{c} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{array}\binom{6}{4}$

a) 1 ve 3 birlikte bulunur?
→hem n'den, hem de r'den 2 sayı eksiltilir.

$$\begin{array}{c} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{array}\binom{6}{4}=\binom{6-2}{4-2}=\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2.1}=6$$

b) 1 ve 3 bulunmaz?
→ sadece n'den eksiltilir.

$$\begin{array}{c} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{array}\binom{6}{4}=\binom{6-2}{4}=\binom{4}{4}=1$$

c) 2 bulunur 3 bulunmaz?
→ önce 2 bulunur için hem n'den, hem r'den bir eksiltilir. $\begin{array}{c} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{array}\binom{6}{4}=\binom{6-1}{4-1}=\binom{5}{3}$

sonra da 3 bulunmaz için sadece r'den bir eksiltilir. $\begin{array}{c} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{array}\binom{5}{3}=\binom{5-1}{3}=\binom{4}{3}=4$ bulunur.

d) 1 veya 3 bulunur?
→1 ve 3 için tüm 4 elemanlı alt kümeler düşünüldüğünde aşağıdaki durum gözlenir;
(1 bulunur),(3 bulunur),
(1 ve 3 bulunur),(1 ve 3 bulunmaz)
bu dört durumdan istenmeyen (1 ve 3 bulunmaz) durumudur. O halde tüm 4 elemanlı alt kümelerden (1 ve 3 bulunmaz) durumunu çıkarsak amacımıza ulaşmış oluruz.
Sonuç : (tüm 4 elemanlılar)- (1 ve 3 bulunmaz)

$$\binom{6}{4}-\binom{6-2}{4}=\binom{6}{4}-\binom{4}{4}=15-1=14$$

e) 1 veya 3 bulunmaz
→d şıkkındaki mantığın bir benzerini bu şık için de düşünürsek;
(tüm 4 elemanlılar)- (1 ve 3 bulunur)

$$\binom{6}{4}-\binom{6-2}{4-2}=\binom{6}{4}-\binom{4}{2}=15-6=9$$

ÖRNEK(4) 5 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:
En çok 2 elemanlı demek 2,1,0 elemanlı alt kümeler demek,
$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=1+5+10=16$ olur.

ÖRNEK(5) 6 elemanlı bir kümenin en az 4 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

En az 4 elemanlı demek 4,5,6 elemanlı alt kümeler demek,
$\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=15+6+1=22$ bulunur.

ÖRNEK(6) 6 elemanlı bir kümenin 4 ten az elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

4'ten az demek 3,2,1,0 elemanlı alt kümeler demek
$\binom{6}{3}+\binom{6}{2}+\binom{6}{1}+\binom{6}{0}=20+15+6+1=42$
bulunur.

Pratik yol-3: Kümelerin tüm alt kümeleri için bulunur-bulunmaz sorularına da bir pratiğimiz var.

n elemanlı bir kümenin tüm alt kümeleri için 2^n şablonu yazılır ve ;

Bulunur derken de, bulunmaz derken de sadece n den istenen kadar eksiltme yapılır.

ÖRNEK(7) A={a,b,c,d,e} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde;

a) a bulunur?
b) a ve b bulunmaz?
c) a veya b bulunmaz?
d) a bulunur, b bulunmaz?

ÇÖZÜM:

Şablonumuz : 2^5 olur.

a) a bulunur?
$\rightarrow$ bir eleman eksiltilir. $2^{5-1}=2^4=16$

b) a ve b bulunmaz?
$\rightarrow$ iki eleman eksiltilir. $2^{5-2}=2^3=8$

c) a veya b bulunmaz?
$\rightarrow$ (tüm alt kümeler)-(a ve b bulunur.)
$2^5-2^{5-1}=2^5-2^4=32-16=16$

d) a bulunur, b bulunmaz?
$\rightarrow$a bulunur: $2^{5-1}=2^4$
b bulunmaz : $2^{4-1}=2^3=8$ olur.

SIRA SİZDE:

ÖRNEK(8) A={a,b,c,d,e,f} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) a bulunur, b bulunmaz ? 16

b) a ve b bulunur? 16

c) a ve b bulunmaz? 16

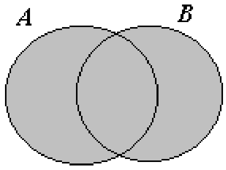
d) a veya b bulunur? 48

e) a veya b bulunmaz? 48

f) a ve b bulunur, c bulunmaz? 8

KÜMELERDE İŞLEMLER

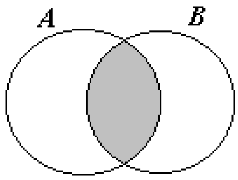
BİRLEŞİM:



A ve B kümelerinin elemanlarının tümünün oluşturduğu kümeye denir ve A∪B ile gösterilir.

$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ veya } x\in B\}$

KÜMELERDE KESİŞİM:



A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye denir ve A∩B ile gösterilir.

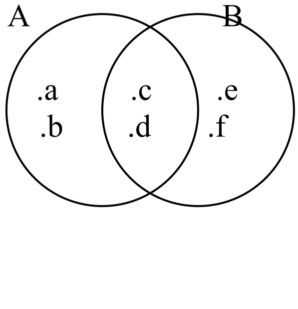
$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ ve } x\in B\}$

ÖRNEK(9) A={a,b,c,d} ve B={c,d,e,f} ise
a) A∩B=? $\rightarrow$ A∩B={c,d}
b) A∪B=? $\rightarrow$ A∪B={a,b,c,d,e,f}

ÇÖZÜM:

A∩B ortak eleman demektir. Ortak elemanlar c ve d dir: A∩B={c,d}

A∪B ortak olanlarla olmayanların hepsi demektir. A∪B={a,b,c,d,e,f}

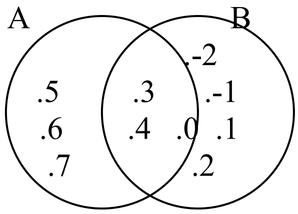


ÖRNEK(10) A={x | 2<x<8 ve x∈Z} ve B={x | –3<x<5 ve x∈Z} ise ;

a) A∩B=? → A∩B={x | 2<x<5 ve x∈Z}
b) A∪B=? → A∪B={x | –3<x<8} ve ∈Z}
c) A\B =? → A\B ={x | 5≤ x< 8} ve ∈Z}

ÇÖZÜM:

Küme elemanları tamsayı olduğundan tek tek yazılabilir.
A={3,4,5,6,7} ve B={-2,-1,0,1,2,3,4}
Şimdi istenenleri bulabiliriz.
a) A∩B = {3,4}
b) A∪B = {-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7}
c) A\B = {5,6,7}



NOT 2 : Kesişimde; alt sınırın en büyüğü ve üst sınırın en küçüğü alınır.
Birleşimde; alt sınırın en küçüğü ve üst sınırın en büyüğü alınır.

ÖRNEK(11) A={x | 2<x<8 ve x∈R} ve B={x | –3<x<5 ve x∈R} ise ;

a) A∩B=?
b) A∪B=?
c) A\B =?

ÇÖZÜM:

Bu sefer elemanlar reel sayı olduğundan tek tek yazılamazlar. Notumuzu dikkate alırsak;

a) A∩B={x | 2<x<5 ve x∈R}
b) A∪B={x | –3<x<8} ve x∈R}
c) A\B ={x | 5≤ x< 8} ve x∈R}

KESİŞİM VE BİRLEŞİM İLE İLGİLİ ÖZELLİKLER:

1) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$ Değişme özelliği

2) $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array}\right\}$ Birleşme öz.

3) $\left.\begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}\right\}$ Tek Kuvvet öz.

4) $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\}$ Dağılma öz.

5) A∪ϕ=A , A∩ϕ=ϕ , A∪E=E , A∩E=A ,

6) s(A∪B) = s(A) + s(B) – s(A∩B)
s(A∪B) = s(A\B) + s(B\A) + s(A∩B)
s

7) s(A∪B∪C) = s(A)+s(B)+s(C)–s(A∩B)– s(A∩C) – s(B∩C) +s(A∩B∩C)

ÖRNEK(12) s(A\B)=10 , s(B\A)=8 ve A∩B nin özalt küme sayısı 63 ise s(A∪B)=?

ÇÖZÜM:

s(A∩B)=n olsun
A∩B 'nin özalt küme sayısı 63 ise
$2^n - 1 = 63$
$2^n = 64 = 2^6$ → n =6 dır.

s(A∪B) = s(A\B) + s(B\A) + s(A∩B)
= 10 + 8 + 6
= 24 elde edilir.

ÖRNEK(13) A={x | 3≤x<12} ve B={x | –1<x≤8} ise (A∩B) kümesi Aşağıdakilerden hangisidir?

A) x > 1 veya x ≥ 8 **B)** 1< x <1
C) 1< x ≤ 8 **D)** 3 ≤ x ≤ 12 **E)** 3 ≤ x ≤ 8

ÇÖZÜM:

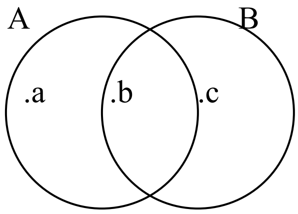
x ile ilgili herhangi bir bilgi verilmediğinden reel sayı kabul ederiz. Yine notumuzu hatırlayacak olursak;
(alt sınırın en büyüğü , üst sınırın en küçüğü)
$(A\cap B) = \{\, 3 \le x \le 8 \,\}$ olur.
Yani cevap E şıkkıdır.

ÖRNEK(14) $[A\cap(A\cap B^{/})]\cup(A\cap B)=?$

A) $A\cap B$ **B)** A C) E D) B E) $A\cup B$

ÇÖZÜM:

1.yol:



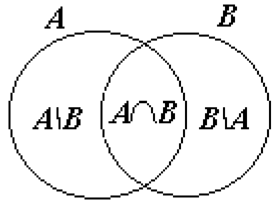
şekildeki gibi her boşluğa bir eleman yerleştirdikten sonra kümeleri bulalım

$$[A\cap(A\cap B^{/})]\cup(A\cap B)$$
$$=[\underbrace{(A\cap A)}_{A}\cap B^{/})]\cup(A\cap B)$$
$$=\underbrace{[\underbrace{A\cap B^{/}}_{a}]\cup(\underbrace{A\cap B}_{b})}_{\underbrace{\{a,b\}}_{A}}$$
= A bulunur.

2.yol:

$$[A\cap(A\cap B^{/})]\cup(A\cap B) = [(A\cap A)\cap B^{/})]\cup(A\cap B)$$
$$= [A\cap B^{/}]\cup(A\cap B)$$
$$= [A \cap (B^{/}\cup B)]$$
$$= [A \cap E]$$
$$= A$$

İKİ KÜMENİN FARKI



A ve B aynı evrensel kümenin iki alt kümesi olsun. A da olup B de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A fark B denir ve (A\B) veya (A−B) ile gösterilir.

$A=\{x \mid x\in A \text{ ve } x\notin B\}$

FARK İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

1) $E \setminus A = E\cap A^{/} = A^{/}$, $A \setminus E = \phi$

2) $A \setminus B = A\cap B^{/}$

3) $A\subset B$ ise $A \setminus B = \phi$

4) $(A \setminus B)^{/} = A^{/}\cup B$

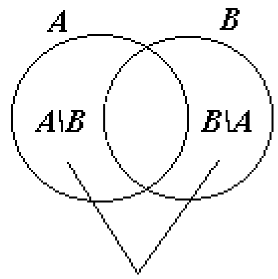
5)$(A \setminus B)\cup B = (A\cup B)$

6) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B\cup C)$

7) $(A \setminus B) = A \setminus (A\cap B)$

8) $A \setminus (B\cap C) =(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$A \setminus (B\cup C) =(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

SİMETRİK FARK



Simetrik Fark
$A\triangle B$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ kümesine simetrik fark denir ve $A \,\Delta\, B$ ile gösterilir.

KUVVET KÜMESİ

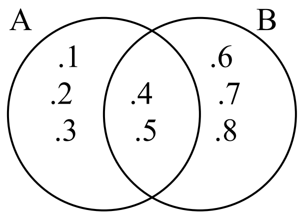
Bir kümenin tüm alt kümelerinin kümesine kuvvet kümesi denir.

❖ A={a,b,c} için
A nın kuvvet kümesi ={{a},{b},{c},{a,b},
{a,c},{b,c}, {a,b,c}}

ÖRNEK(15) A={1,2,3,4,5} ve B={4,5,6,7,8} olsun buna göre;

a) A\B=?
b) B\A=?
c) AΔB=?

Çz; A\B={1,2,3}
B\A={6,7,8}
AΔB={1,2,3,6,7,8}



TÜMLEME

A⊂E olmak üzere E kümesinin A kümesinde olmayan elemanlarının oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A' veya $\overline{A}$ ile gösterilir.

$A'=\{x \mid x\in E \text{ ve } x\notin A\}$ dır.

TÜMLEME İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

1) $E'=\phi$

2) $\phi'=E$

3) $(A')'=A$

4) $A\subset B \Leftrightarrow B'\subset A'$

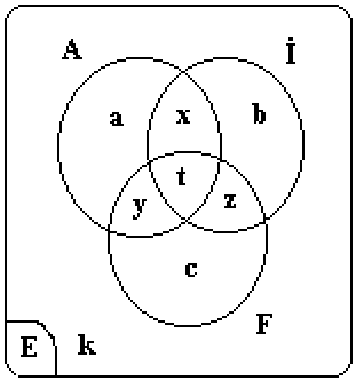
5) $s(A)+s(A')=s(E)$

6) $A\cap A'=\phi$, $A\cup A'=E$

7) $\left.\begin{aligned}(A\cup B)' &= A'\cap B'\\ (A\cap B)' &= A'\cup B'\end{aligned}\right\}$ De Morgan Kuralı

8) $A'\cap E=A'$, $A'\cup E=E$

NOT : Almanca , İngilizce ve Fransızca bilen bir topluluk için



- Üçünü bilen : t
- Hiç birini bilmeyen : k
- En az birini bilen : a,b,c,x,y,z,t
- En az ikisini bilen : x,y,z,t
- En fazla birini bilen : a,b,c,k
- En fazla ikisini bilen: a,b,c,x,y,z,k
- En fazla üçünü bilen : a,b,c,x,y,z,t,k
- En az birini bilmeyen : a,b,c,x,y,z,k
- En az ikisini bilmeyen: a,b,c,k
- Sadece bir dil bilen : a,b,c
- Sadece iki dil bilen : x,y,z
- Alm. bilip İng. bilmeyen : a,y
- Alm. ve İng. Bilip Fransızca bilmeyen: a,x,b
- Alm. bilip İng. ve Frans. Bilmeyen : a

GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK(16) A={a,b,{a},d,{a,b,c},e} kümesi veriliyor.Aşağıdakilerden hangisi A'nın bir elemanı değildir?
A) a B) b **C)** c D) d E) e

ÇÖZÜM:

a,b,d ve e elemandır, c değildir. Cevap C şıkkı

ÖRNEK(17) A={a,b,{a},d,{a,b,c},e} kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi A'nın hem elemanı hem de altkümesidir?

A) {a} B){b} C){a,b,c} D){a,b} E) {a,e}

ÇÖZÜM:

a tek başına bir eleman iken {a} bir alt kümedir.
{a} ise yine tek başına bir elemandır. O yüzden cevap A şıkkıdır.

ÖRNEK(18) A={a,b,{a},d,{a,b,c},e} kümesi veriliyor. Bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Küme parantezi içinde virgülle birbirinden ayrılan her terim bir eleman olduğundan s(A)=6 dır.

ÖRNEK(19) E evrensel kümesinde tanımlı A ve B kümeleri için;

$s(A)+s(B')=17$
$s(B)+s(A')=15$ ise $s(E)=?$

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{rl} & s(A)+s(B')=17 \\ + & \underline{s(B)+s(A')=15} \end{array}$$

$$\underbrace{s(A)+s(A')}_{s(E)}+\underbrace{s(B')+s(B)}_{s(E)}=17+15$$

$$2.s(E) = 32$$
$$s(E) = 16$$

ÖRNEK(20) E evrensel kümesinde tanımlı A ve B kümeleri için;

$s(A) + s(B) + s(A')=24$ ve $s(E)=18$ ise $s(B')=?$

ÇÖZÜM:

$$\underbrace{s(A) + s(A')}_{s(E)=18}+s(B) = 24 \rightarrow s(B) = 6$$

$s(B) + s(B') = s(E) \rightarrow 6 + s(B') = 18$
$\rightarrow s(B') = 12$ bulunur.

ÖRNEK(21) A={1,2,3,4,5,6,7} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde en az bir tane tek sayı bulunur?

ÇÖZÜM:

En az bir tane tek sayı olsun istiyorsak, içinde hiç tek sayı olmayan {yani çift elemanlılar} alt kümeleri tüm alt kümelerden çıkarırız. Böylece kalan alt kümelerde en az bir tek sayı bulunmuş olur.
s(A) = 7 ve Ç={2,4,6} → s(Ç) = 3 olmak üzere

{tüm alt kümeler} – {sadece çift elemanlılar}
$2^7-2^3=128-8=120$ tanesinde en az bir tek sayı vardır.

ÖRNEK(22) Boş olmayan A ve B kümelerinde s(A)=5x−1 , s(B)=3x−1 dir. A ile B nin alt kümelerinin sayıları oranı 64 ise alt kümelerinin sayıları çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

A kümesinin alt küme sayısı : 2^{5x-1}
B kümesinin alt küme sayısı : 2^{3x-1}
A ile B nin alt kümelerinin sayıları oranı:

$$\frac{2^{5x-1}}{2^{3x-1}}=64 \Rightarrow 2^{5x-1-3x+1}=2^6$$

$$2x = 6$$
$$x = 3$$

A kümesinin alt küme sayısı: $2^{5x-1}=2^{5.3-1}=2^{14}$

B kümesinin alt küme sayısı : $2^{3x-1}=2^{3.3-1}=2^{8}$

alt kümelerinin sayıları çarpımı:

$$2^{14}.2^{8}=2^{14+8}=2^{22} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(23) $A\cup B=\{x : |x-2|\le 3 \text{ ve } x\in Z\}$, $A\cap B=\{1,2,3\}$ ve $A\setminus B=\{-1,5\}$ ise B kümesini bulun

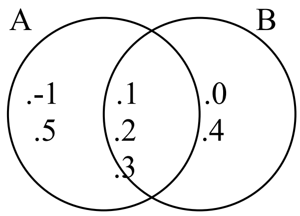
ÇÖZÜM:

$A\cup B \rightarrow |x-2|\le 3 \rightarrow -3\le x-2\le 3$

$\rightarrow -1\le x\le 5$

$\rightarrow \{-1,0,1,2,3,4,5\}$

şekil üzerinde gösterecek olursak;



o halde B ={0,1,2,3,4} olur

ÖRNEK(24) $A=\{x|\ 40\le x\le 169 , x\in Z\}$ veriliyor A'nın kaç elemanı 4 ve 7 ile bölünür?

ÇÖZÜM:

Bir sayının 4 ve 7 ile bölünmesi demek 4 ve 7 nin okek'i ile bölünmesi demektir.

Okek(4,7)=28 olduğundan aradığımız sayılar 28 ile bölünmeli, diğer bir değişle 28'in katı olmalı;

Sayılarımız 28.kat şeklinde ise kat'a değer verip $40\le x\le 169$ aralığına giren sayıları küme içine alırız

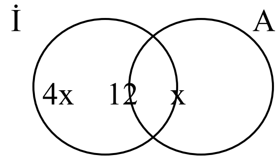
Kat = 2,3,4,5,6 için bulunan 56,84,112,140,168 sayıları aradığımız elemanlardır. O halde

{56,84,112,140,168} $\rightarrow$ 5 tane eleman hem 4 hem de 7'ye bölünür.

Örnek(22) Bir toplulukta İngilizce ve Almanca bilenlerin sayısı 12 , İngilizce veya Almanca bilenlerin sayısı 32 dir. Sadece İngilizce bilenler, Almanca bilip İngilizce bilmeyenlerin 4 katı ise İngilizce bilen kaç kişidir?

ÇÖZÜM:

Böyle soruları şekil üzerine yerleştirip çözmek daha kolaydır.



$4x+12+x = 32 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$

s(İ) = 4x+12 = 4.4+12 = 28 bulunur.

Örnek(23) Bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı 29 ise bu kümenin 3 elemanlı alt kümeleri kaç tanedir?

ÇÖZÜM:

Bu kümenin eleman sayısı n olsun

En çok 2 elemanlıların sayısı;

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=1+n+\frac{n(n-1)}{2.1}=29$$

$$\Rightarrow \frac{n^2-n+2n}{2}=29-1$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}=28$$

$$\Rightarrow n^2+n=56$$

$$\Rightarrow n^2+n-56=0$$

$$\Rightarrow (n+8)(n-7)=0$$

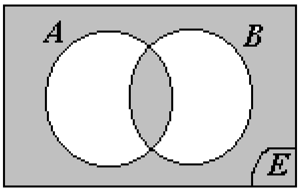
n = -8 ve n = 7 bulunur

bir kümenin eleman sayısı negatif olamayacağından bu kümenin eleman sayısı 7 olur.

Bu kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı ise

$$\binom{7}{3}=\frac{7.6.5}{3.2.1}=35 \text{ bulunur.}$$

Örnek(24)



Şekildeki taralı bölge A.H ile ifade edilir?

A) $(A\cup B)\cup B$ **B)** $E\setminus(A\cup B)$ **C)** $(A\cap B)\cup E$
D) $(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ **E)** $(A'\cup B')\cap(A\cap B)$

ÇÖZÜM:

Taralı kısım $(A\cap B)$ ile $(A\cup B)'$ 'nin birleşimidir

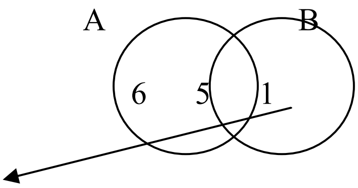
$(A\cap B)\cup(A\cup B)' \rightarrow (A\cap B)\cup(A'\cap B')$

bu durumda doğru cevap D şıkkıdır.

Örnek(25) A ve B kümeleri için $A\not\subset B$, $B\not\subset A$, $s(A\cup B)=12$, $s(A\cap B)=5$ olduğuna göre A kümesinde en çok kaç eleman olabilir?

ÇÖZÜM:

Şekil üzerinde düşünelim.



Bu kısmı en az seçmeliyiz ki A büyüsün. Bu kısım 0 elemanlı seçilirse B, A'nın alt kümesi olur ki bu duruma soruda izin verilmiyor. $(B\not\subset A)$

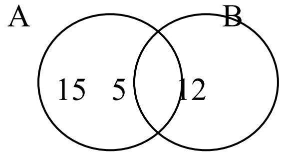
O halde s(A) = 11 olur.

Örnek(26) $s(A\setminus B)=15$, $s(B\setminus A)=12$ ve $A\cap B$'nin alt küme sayısı 32 ise $s(A\cup B)$=?

ÇÖZÜM:

$A\cap B$ kümesinin eleman sayısı n olsun

$A\cap B$'nin alt küme sayısı $32 = 2^n$ → =5 olur. Şimdi bilgileri şekil üzerine taşıyalım.



bu durumda $s(A\cup B)$= 15+5+12 = 32 olur.

Örnek(27) A={1,2,3,4,5} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2 veya 4 bulunur?

ÇÖZÜM:

Tüm alt kümeleri 2 ve 4 için düşündüğümüzde karşımıza aşağıdaki tablo çıkar;

- 2 vardır
- 4 vardır
- 2ve 4 vardır
- 2 ve 4 yoktur

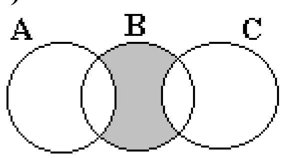
bunların dışında bir durum söz konusu olamaz. İlk üç durum zaten 2 veya 4 bulunurun açılımıdır. İstenmeyen durum 2 veya 4 bulunmazdır. Biz de 2 veya 4 bulunmazı tüm durumlardan çıkarır ve isteneni buluruz.

{2 veya 4 bulunur} = {Tüm alt kümeler} − {2 ve 4 bulunmaz}

$= 2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$

olur.

Örnek(28)



Taralı Bölge A.H. ile gösterilir?

A) $B\setminus(A\cup B)$ **B)** $C\setminus(A\cup B)$ **C)** $B\setminus(A\cup C)$
D) $C\setminus(A\cup C)$ **E)** $A\setminus(A\cup C)$

ÇÖZÜM:

Şekilde A ve C kümelerinin boş, sadece B nin ortak olmayan kısmının dolu olduğu görülüyor. Yani bir nevi B den A ve C çıkarılmış, yani;

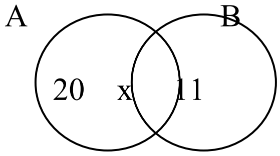
$B\setminus(A\cup C)$ olur.

Doğru cevap C şıkkıdır.

Örnek(29) s(A\B)=20 , s(B\A)=11 ve s(A∪B)=33 ise s(A∩B)=?

ÇÖZÜM:

Bu sorularda en güzeli şekil üzerinde çözmektir. Verileri şekil üzerine yerleştirirsek ;



s(A∪B)=33 → 20 + x + 11 = 33
→ x + 31 = 33
→ x = 2 bulunur.

Örnek(30) Bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Bu kümenin eleman sayısı 2 arttırılırsa 2 elemanlı alt küme sayısı kaç olur?

ÇÖZÜM:

Kümemizin eleman sayısı n olsun

$\binom{n}{5}=\binom{n}{3} \Leftrightarrow$ i) $n=5+3=8$ ii) $5\neq 3$

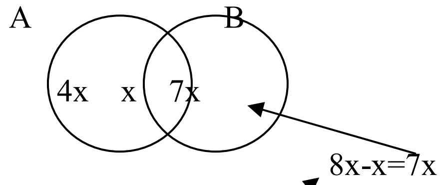
özelliğini hatırlarsak eleman sayımızın 8 olduğu görülür.

Bu kümenin eleman sayısı 2 arttırılırsa 8+2=10 olur.
10 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı $\binom{10}{2}=\frac{10.9}{2.1}=45$ bulunur.

Örnek(31) s(A\B)=4.s(A∩B) , 8.s(A)=5.s(B) ve s(A∪B)=36 ise (A∩B)'nin alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Verileri şekil üzerine yerleştirirsek;



8.s(A)=5.s(B) →8.(5x) = 5.s(B)
→40x = 5.s(B)
→ s(B) = 8x

s(A∪B)=36 → 4x+x+7x = 36
→12x = 36
→ x = 3
s(A∩B)=3 ise alt küme sayısı $2^3=8$ olur.

Örnek(32) A∪B={1,2,3,4,5,6} ve A∪C ={3,5,7,8} ise A∪(B∩C) kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

A∪(B∩C) ifadesine dağılma özelliğini uygularsak ;
A∪(B∩C) = (A∪B) ∩ (A∪C)
= {1,2,3,4,5,6} ∩ {3,5,7,8}
= {3,5} bulunur.

Örnek(33) Bir sınıfın 30 kişilik öğrencisinin 18'i erkek, 12'si bayandır. Öğrencilerin 10 kişisi mavi gözlüdür. Mavi gözlü olmayan erkek sayısı mavi gözlü bayan sayısının 3 katıdır. Mavi gözlü olmayan erkek sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:
Bu sorularda da tablo çizmek en iyisidir.
Verileri tabloya yerleştirirsek;

	Mavi gözlü	Mavi gözlü olmayan	Toplam
Erkek		3x	18
Bayan	x	**12-x**	12
Toplam	10	**20**	30

3x+12-x = 20 → 2x = 8 →x = 4
Mavi gözlü olmayan erkek sayısı 3x =3.4 =12 dir.

Örnek(34) A={a,b,c,d,e,f} kümesinin alt kümelerinden kaç tanesinde b ve c birlikte bulunur?

ÇÖZÜM:

Pratik yol-3'ü hatırlayalım;

Şablonumuz : 2^6

Cevabımız : $2^{6-2} = 2^4 = 16$ olur.

Örnek(35) A={a,b,c,d,e,f} kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinden kaç tanesinde a ve b bulunup e ve f bulunmaz?

ÇÖZÜM:

Pratik yo-2'yi hatırlayalım

Şablonumuz : $\binom{6}{4}$

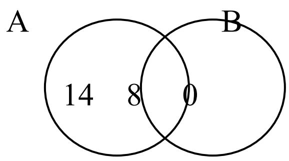
a ve b bulunur : $\binom{6-2}{4-2} = \binom{4}{2}$

e ve f bulunmaz : $\binom{4-2}{2} = \binom{2}{2} = 1$ olur.

Örnek(36) s(A)=22 , s(B)=8 , (A∩B)≠ϕ dir. (A∪B) kümesinin eleman sayısı en az a, en çok b ise a+b=?

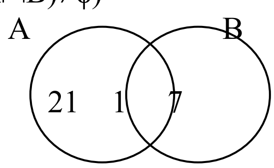
ÇÖZÜM:

(A∪B) 'nin en az olması için (A∩B) en çok olmalıdır.



Bu durumda a = s(A∪B)=14+8+0 =22 olur.

(A∪B) 'nin en çok olması için (A∩B) en az olmalıdır.((A∩B)≠ϕ)



Bu durumda b = s(A∪B)=21+1+7 = 29 olur.

Sonuç : a + b = 22+29 = 51 bulunur

Örnek(37) {1,2}⊂A⊂{1,2,3,4,5} ise kaç tane A kümesi yazılabilir?
(*5−2=3 →2^3)

ÇÖZÜM:

A kümesi en çok {1,2,3,4,5} elemanlarını, en az {1,2} elemanlarını içereceğinden {1,2,3,4,5} kümesinin içinde {1,2} elemanları bulunana alt kümelerini buluruz. (pratik yol-3)

cevap : $2^5 \Rightarrow 2^{5-2} = 2^3 = 8$ olur.

2. yol:
{1,2}⊂A⊂{1,2,3,4,5} tipindeki sorularda farklı bir şart verilmemişse soldaki küme elemanlarını sağdan silip kalanların alt kümesini bulun
soldakini sağdan silersek {3,4,5} kalır

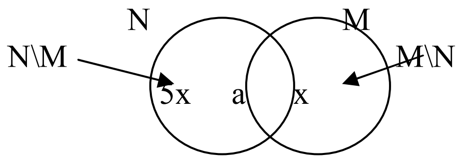
alt kümeleri de $2^3 = 8$ olur.

Örnek(38) Kesişimleri boş küme olmayan M ve N kümeleri için ,
s(N)=4s(M)
s(N\M)=5s(M\N)
olduğuna göre , N kümesi en az kaç elemanlıdır?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Bilgileri şekil üzerine yerleştirirsek;



s(N)=4s(M) → 5x +a = 4.(a+x)
→ 5x+a = 4a + 4x
→ x = 3a
s(N) = 5x+a = 5.3a+a = 16a olur.
M∩N boştan farklı olduğundan a'ya minimum 1 verirsek

s(N) = 16a =16.1 = 16 bulunur.

Örnek(39) A={1,2,3,4,5,6,7,8} kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 bulunur, ama 4 bulunmaz?

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

Pratik yol-2'yi hatırlayalım

Şablonumuz: $\binom{8}{4}$

2 bulunur → $\binom{8-1}{4-1}=\binom{7}{3}$

4 bulunmaz→ $\binom{7-1}{3}=\binom{6}{3}=\dfrac{6.5.4}{3.2.1}=20$ olur.

Örnek(40) Pozitif tamsayılardan oluşan
A={x | x < 100 , x = 2n, n∈Z^+}
B={x | x < 151 , x = 3n, n∈Z^+} kümeleri veriliyor. buna göre A∪B kümesinin eleman sayısı kaçtır? **(ÖSS-2001)**

ÇÖZÜM:

s(A∪B) = s(A) + s(B) – s(A∩B) formülünü hatırlayalım;
Önce A ve B kümelerinin elemanlarını bulalım

A = {2,4,6,…..98} (2'nin katı sayılar)
B = {3,6,9,…..150} (3'ün katı sayılar)
Şimdi de (A∩B) kümesini bulalım.
(A∩B) kümesi ortak elemanlardan oluştuğu için hem 2'nin hem de 3'ün katı olmalı
(A kümesinin 100'den sonra elemanı olmadığından x < 100 için 6'nın katlarına bakarız)
(A∩B)= {6,12,18,…..96}
son olarak eleman sayılarını ardışık sayılardan öğrendiğimiz terim sayısı formülünü kullanarak bulalım ;

$$s(A)=\frac{98-2}{2}+1=49$$

$$s(B)=\frac{150-3}{3}+1=50$$

$$s(A\cap B)=\frac{96-6}{6}+1=16$$

s(A∪B) = s(A) + s(B) – s(A∩B)
= 49 + 50 – 16 = 83 bulunur.

2.yol:
Şimdiki çözüm daha çok hoşunuza gidecek.(daha kısa ya ☺)

$$\begin{array}{r|l} 99 & 2 \\ \hline -98 & 49 \\ 1 & \end{array} \rightarrow s(A) = 49$$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ \hline -150 & 50 \\ 0 & \end{array} \rightarrow s(B) = 50$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 6 \\ \hline -96 & 16 \\ 3 & \end{array} \rightarrow s(A\cap B) = 16$$

sayıları 99 ve 150 almamızın sebebi sınırların < (yani dahil değil) olmasıdır.
s(A∪B) = s(A) + s(B) – s(A∩B)
= 49 + 50 – 16
= 83 bulunur.

YAZAN
İBRAHİM HALİL BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni
www.globalders.com
e-mail:
ibrahimhalilbaba@mynet.com